金融商品設計與評價期末報告

基於房價指數變動率的房貸利率選擇權

國立清華大學 計量財務金融學系

指導教授：張焯然

小組成員

湯益萍 101071467

鄭潤澤 101071466

李季芳 101071507

張景盛 101071508 (組長)

目錄

表格目錄

圖表目錄

1. 導言

根據 Laufer(2013)[1]對美國洛杉磯郡房屋貸款違約的研究，在 2006 年至 2009 年間，40%的房貸違約者早在 2004 年房價高漲前就已購買了房屋，即使房價在 2006 年後重挫達 30%，他們的房產淨值也仍為正——不應有違約的動機。然而，通過再貸款(Cash-out refinances)、二次房貸(second mortgage)及房屋淨值信用額度(home equity line of credit)，這些早期購房者將房價上漲帶來的淨值作為抵押換取資金，從而導致其槓杆進一步擴大、房產淨值所剩無幾。當房價上漲的趨勢下降甚至反轉開始下跌時，其違約的幾率就大大增加了。

過去十年，台灣薪資水準成長率低而房價不斷攀升。根據《天下》雜誌 2011 年 8 月文章，中研院院士管中閔形容過去十年是台灣「沈鬱的十年」——扣掉物價之後的台灣實質薪資年成長率僅僅 0.1%，而星、韓卻有 4.5%。連我們最自豪的電子電機薪水也不過成長 0.39%。但反顧台灣的房價，過去四年以來，全台房價平均漲幅為 34%，熱門地區的房價如台北市房價平均漲幅更高達 50%，更有學者指出，台灣的房價所得比高達 14 倍。所以現在大多數希望買房的民眾大多只能以低於五成的自備款再加上向銀行申請房貸的方式來買到房子，由此可知房貸在台灣的重要性。舉例來說，從民眾角度來看，有房貸需求的所有戶數比例佔總消費金融的總戶數比近年來都占一成以上；而從銀行的角度來看[2]，房貸放款的比例佔總消金的放款比例從 2005 年開始一直都在三成以上，而近年來更高達了四成。

台灣從 2003 年房地產復甦以來，北中南各地的建造執照申請量即大幅的增加，而房地產的價格一直以來也呈現上漲的趨勢。就近年來說，2012 年台灣整體房價指數較去年亦呈現約 5%的成長，而且全台除了台南市之外，其他各都會區均呈現上漲的趨勢。

圖表 1 信義房價指數-大台北月指數歷年變化

而在近三年來我們仍舊認為房價可能依然呈現上漲的趨勢原因為，一、從資金面角度來看，歐洲央行宣布啟動直接貨幣交易(OMT)，日本央行也宣布擴大貨幣寬鬆，當全球主要經濟體都競相印鈔還債，這些資金流竄到亞洲新興市場國家，勢將造成物價通膨，房價飆漲的情況。二、美聯準會也宣示「維持超低利率」，從 2014 年年底延長到 2015 年年中，而房貸利率代表房貸民眾負擔的程度，長期低率房價要跌實在不容易，再者，長期低利率，讓壽險業利差損問題更形嚴重。當壽險業資金苦無穩定報酬去處時，將再投入有穩定收租報酬的大型商用不動產來避險。三、政府政策：房地產一向被視為火車頭產業，政府推出的奢侈稅、實價登錄、緊縮豪宅貸款等政策，只為穩地房價而非抑制房價，所以近期房價並不會因此而下跌。

但仍有一些學者和期刊認為，台灣未來長期漲幅將不在。原因是因為台灣已經開始面臨了人口老化和少子化的問題，一旦台灣人口開始呈現負成長，經濟將開始衰退，國際資金也開始移出，房價漲勢將面臨到威脅。

我們相信對於身負房貸的民眾，一定害怕自己向銀行申請貸款買的房屋長期漲幅並不如自己的預期，因為那些房貸族的房屋貸款的金額固定且每期又必須償還本金加利息，若房價漲幅不如預期，則原本買的房就顯得“貴”了。剛開始我們都先假設貸款與銀

行約定的是一個較高的固定還款利率，若房價漲幅並非如貸款者預計的高，此時每期仍要面對一個較高的房貸固定利率，房屋淨值貸款者將面臨加重還款的壓力，而此時銀行也要面臨貸款者可能會延遲還款或是違約的風險。

1.1 產品定位

面臨未來房價走勢的不確定性，從借款人的角度來看，若未來房價漲幅不如預期，又要以原本借款時依預期未來房價走勢所訂定的房貸還款的固定利率來還款，因為還款的壓力增加，將會造成貸款者產生不太願意還款的心態；從銀行角度來看，若是房貸者因為房價的變動有延遲還款的現象或是提早還款甚至是違約的現象，對於銀行的信用風險也會產生很大的威脅。

因此，我們擬設計一個以向房貸者發行的選擇權，這個選擇權的標的物為信義房屋指數的變動率。此選擇權可賦予房貸者這樣的權利：當市場房價增長率不再像期初購買房屋時那麼高時，消費者有權將自己的房貸利率降低（依據事先確定的和房價指數相關的關聯公式）。這不僅讓貸款者還款意願提高，也有助於遞減銀行所面臨的的信用風險。

1.2 其他國家的房地產衍生性商品

最早推出房地產衍生性商品的是倫敦期貨與選擇權交易所(London Futures and Options Exchange, FOX)，該交易所早在 1991 年便推出了基於英國 Halifax 房價指數的住宅與商用地產之期貨。但這些房地產期貨的交易在當年 10 月便因為內幕交易醜聞而被迫終止。

2003 年，高盛(Goldman Sachs)同樣基於 Halifax 房價指數發行了在倫敦股票交易所(London Stock Exchange)交易的權証。

2007 年，摩根士丹利(Morgan Stanley)也基於 Halifax 房價指數發行了奇異交換(Exotic Swap)，但交易對手及交易合約的詳細資訊都並未揭露。

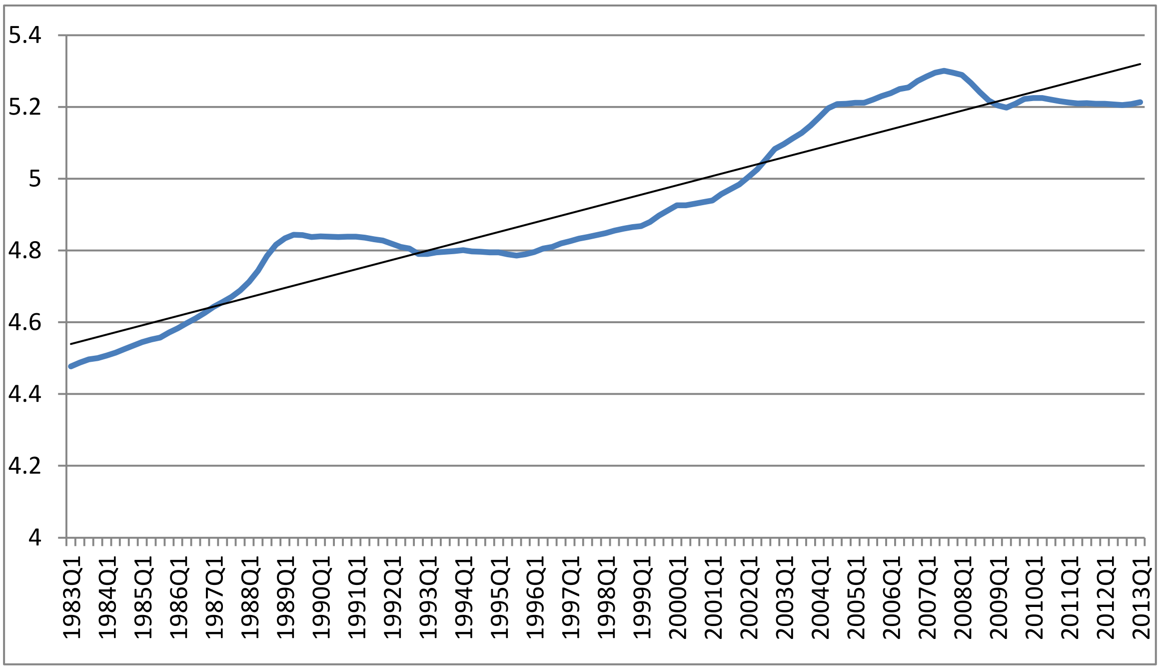
在美國，芝加哥商品交易所集團在 2005 年推出了基於 S&P/ Case-Shiller Home Price Index 的房價指數期貨與選擇權。

2. 房價指數

2.1 英美房價指數

英國的 Halifax 房價系列指數自 1983 年 1 月開始編制，是世界上資料歷史最長的房價指數。該指數目前由 Lloyds Bank 編制發佈。因為該指數的權威性，其已被許多衍生性金融商品作為標的。

Halifax 房價系列指數根據房屋新舊、房屋用途、所在區域等細分出多達 15 種指數，圖表 2 為 UK: Halifax All House (All Buyers), Seasonal-Adjusted Quarterly Data 指數，是最被接受的指數之一。



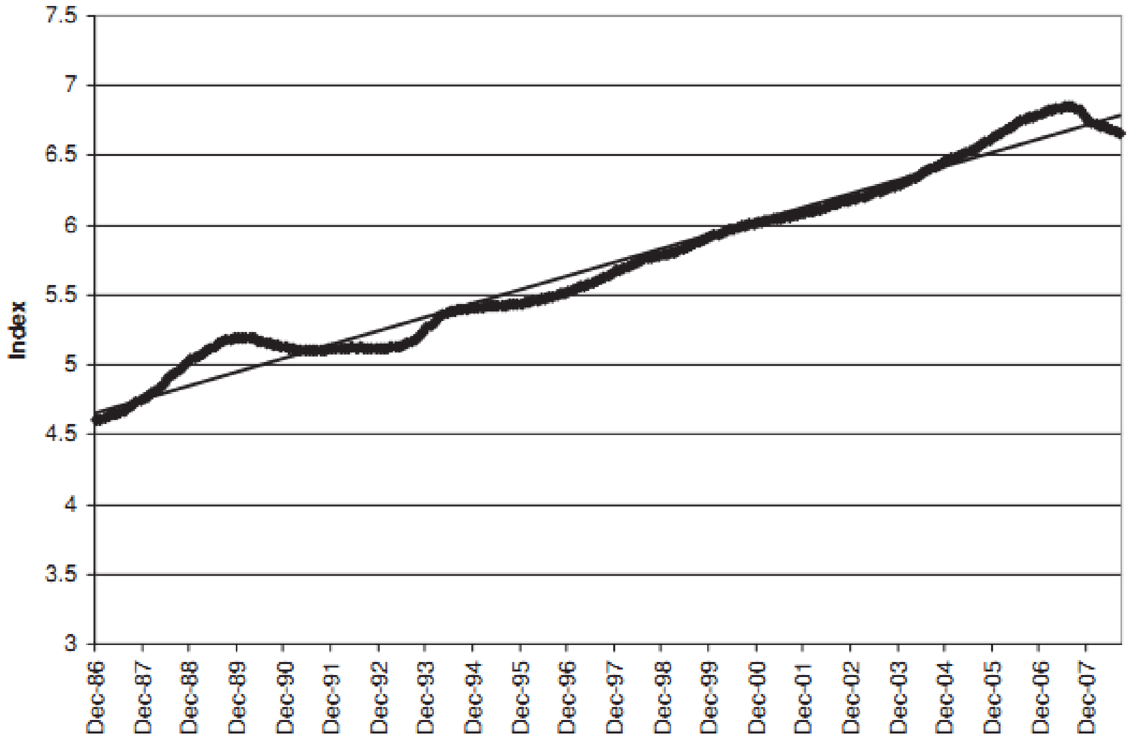
圖表 2 UK: Halifax All House (All Buyers), Seasonal-Adjusted Quarterly Data, in log-scale.

Source: www.lloydsbankinggroup.com

在英國，除了最著名、歷史最悠久的 Halifax 系列指數之外，摩根士丹利資本指數 (Morgan Stanley Capital Index, MSCI)旗下的 IPD 公司也定期發佈英國房價指數，該指數自 1986 年開始編制，每月發佈。圖表 3 為該指數之形態。

另外，值得一提的是，MSCI-IPD 公司也對法國、德國等多個歐洲國家發佈房價指

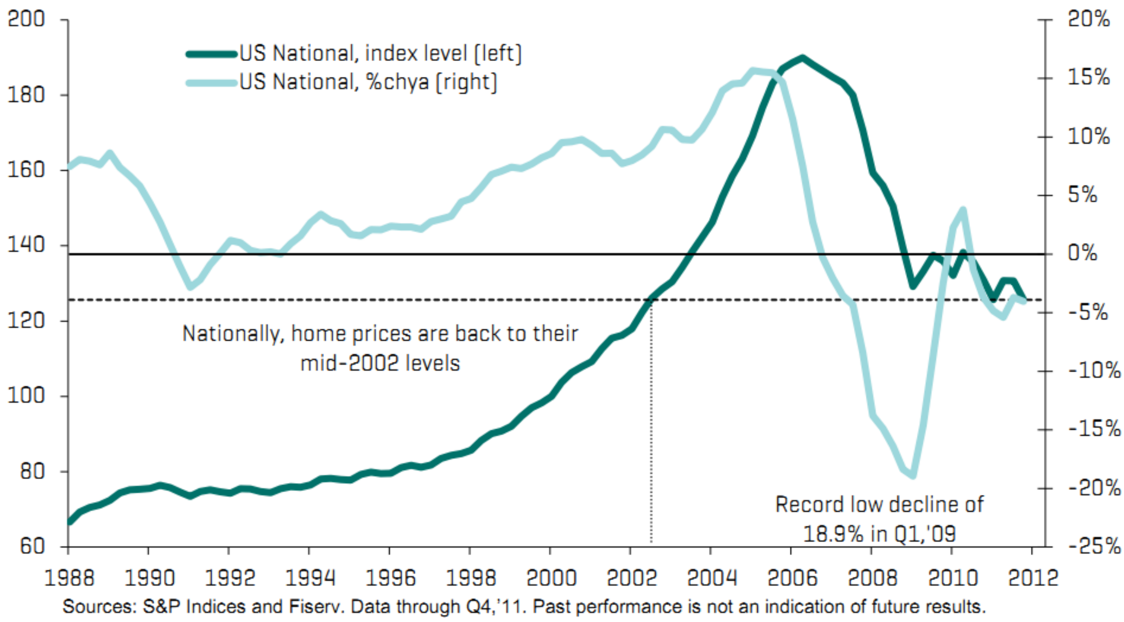
數，但資料歷史尚短。



圖表 3 IPD UK All Property Index (in log-scale)

Source: Fabozzi, Shiller and Tunaru (2010)[3]

美國則有 S&P/ Case-Shiller 住宅房屋指數，該指數由兩位房地產金融的著名學者 Karl E. Case 與 Robert J. Shiller 聯合標準普爾推出，覆蓋了美國 20 個都會區。圖表 4 為全美指數情況。



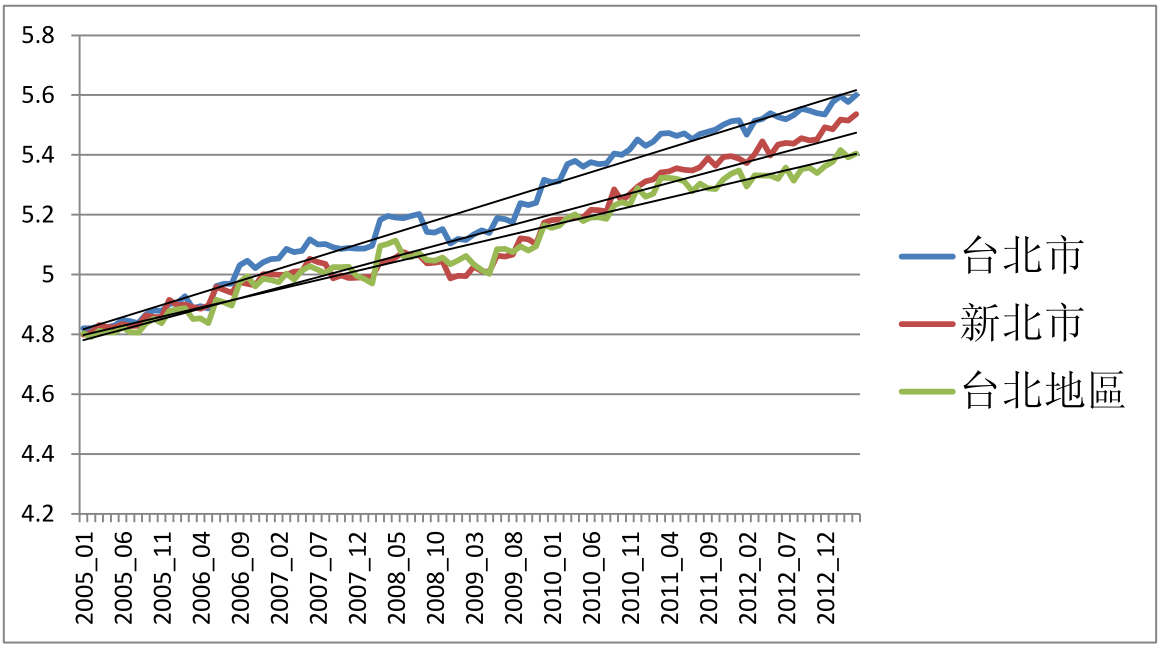
圖表 4 USA: S&P/Case-Shiller Home Price Index

Source: S&P Indices

2.2 台灣：信義房價指數

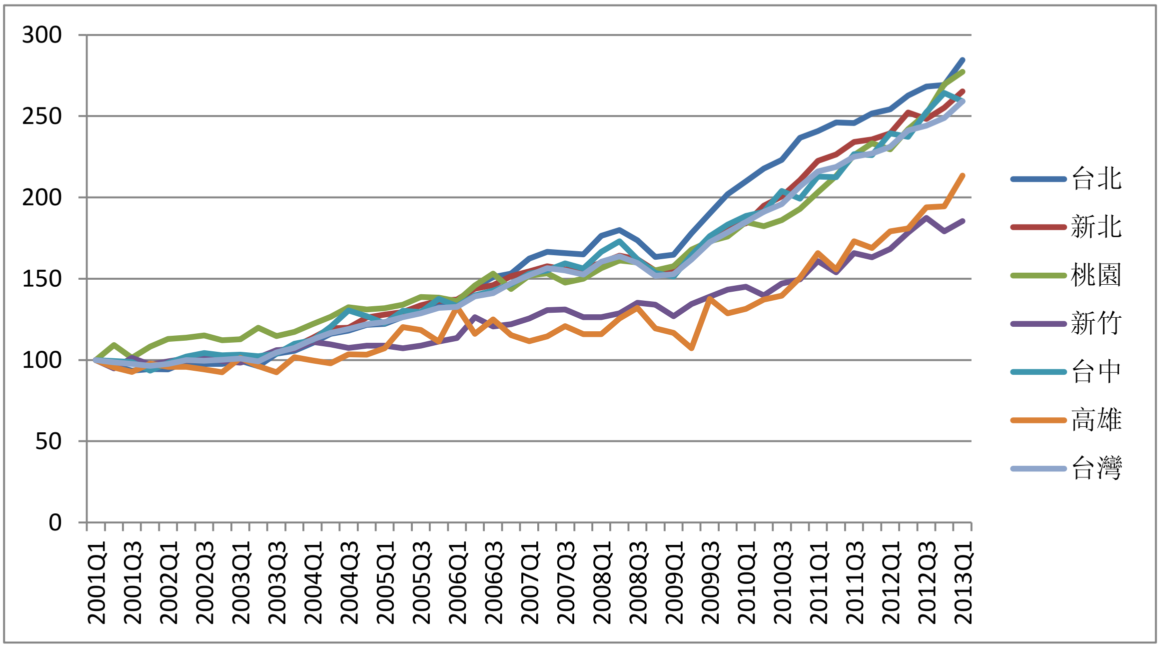
信義房價指數自 1998 年推出，原指數係與美國西維吉尼亞大學合作，採特徵價格函數理論，呈現房價長期發展趨勢。

之後信義房屋與政治大學財務管理學系姜堯民系主任合作，推出了新版本的信義房價指數。新指數沿用特徵價格函數理論基礎，縮小分析區間，精確且即時反應台灣房地產價格的波動情形。



圖表 5 信義房價指數-台北地區(log)

Source: 信義房屋



圖表 6 信義房價指數-六大都會及全台

2.3 房價指數的刻畫

參考圖表 1 至圖表 6，我們不難看出房價指數呈現明顯的上升趨勢。對於這類存在趨勢的隨機過程，許多學者都基於 Ornstein-Ulenbeck process 提出了不同的模型。

Kau et al(1990)[4] 提出，房屋價格 B 的變動率服從 OU Process，並收斂至平均值(b)，表示房價的變動率會依照 b 不論如何變動，長期而言將向回到平均值回復。

$$\frac{dB}{B} = (\alpha_B - b)dt + \sigma_B dz_b$$

Kau et al 並進一步在風險中立的架設下，將 drift term 跟 martingale term 做機率測度轉換 ，得到風險中立下的房價與無風險利率的關係：

$$\frac{d\hat{B}}{\hat{B}} = (r - b)dt + \sigma_B dz_b$$

其中 r 為無風險利率，$\hat{B}$為風險中立下的房價估計指數。

Hull(1993)[5]將 B 為房屋價值轉換為房價指數進行模型建構：

$$\frac{dI}{I} = (r - \eta)dt + \sigma_I d_{ZI}$$

Fabozzi, Shiller and Tunaru (2010)的研究則是參考 Lo and Wang(1995)[6]對資產價格可被預測的選擇權的評價方法，認爲房價指數取對數之後服從 Geometric OU Process:

$$\frac{\Delta LnI_t}{LnI_t} = \theta(\bar{I} - I_t)dt + \sigma dW_t$$

2.4 參數估計

我們參考 Fabozzi, Shiller and Tunaru (2010)的研究，利用 Geometric OU Process 對台灣信義房價指數進行研究，先對房價指數取自然對數後做差分，再對信義指數作 MLE 小樣本估計。

標準的 Ornstein-Uhlenbeck Process 為：

$$r_t = \theta(\bar{r} - r_t)dt + \sigma dW_t$$

$$r_t - e^{-\theta\Delta t} r_{t-\Delta t} \sim \mathcal{N}\left[b\left(1 - e^{-\theta\Delta t}\right),\ \sigma^2 \frac{1 - e^{-\theta\Delta t}}{2\theta}\right]$$

其機率密度函數為:

$$f_i(x_{ti}; \bar{x}, \theta, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\left(x_{ti} - \bar{x} - (x_{ti} - \bar{x})e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}\right)^2}{2\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}\right)}\right]$$

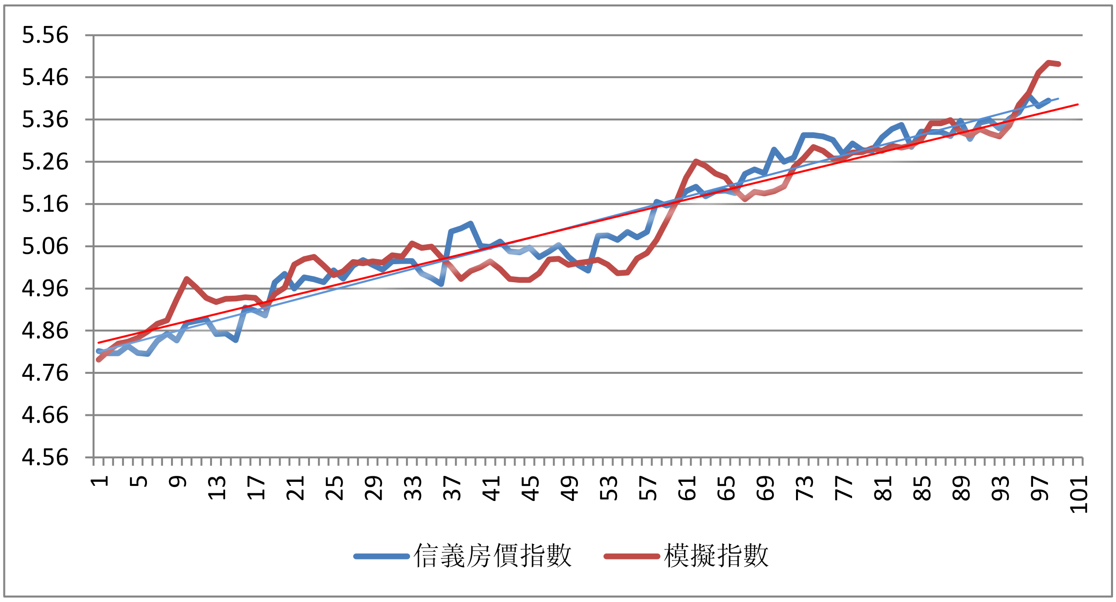
得到最佳配適結果下的參數

表格 1 MLE 估計結果

樣本：信義房價指數，台北地區 2005 年 1 月至 2013 年 4 月，共 100 筆月資料	
Mean of *delta(logI)/logI*	0.001208393
Sigma of *delta(logI)/logI*	0.00573029
Theta (MLE estimator)	0.707968605

2.5 蒙地卡羅模擬

以 2.4 節得到的 MLE estimator Theta 作為 Geometric OU process 模擬之參數，並以 2005 年 1 月值作為初值，進行十萬次模擬。模擬得到了良好的結果，取其中一個結果與真實的信義房價指數作對比，如圖表 7



圖表 7 模擬結果

圖表 7 顯示兩指數(模擬跟公佈指數)的趨勢十分相近，表示公佈指數與文獻上的模型可以配適，於是我們便利用此模型進行模擬假設進行選擇權的標的物估算。

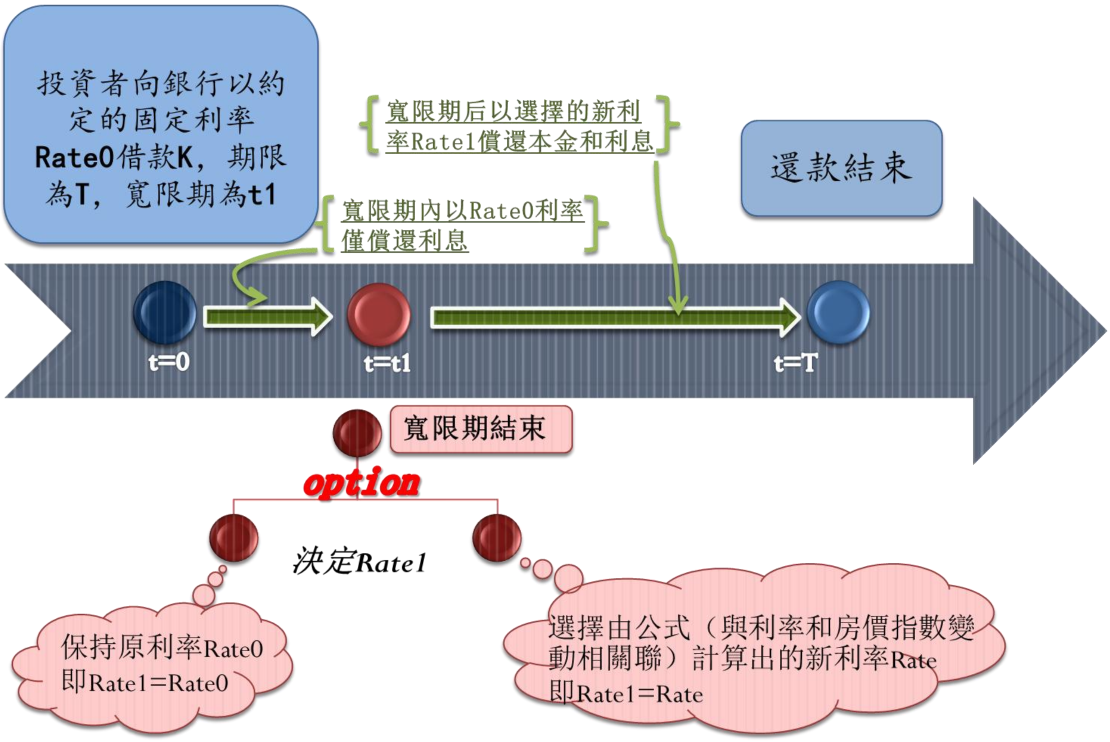
3. 產品設計與定價

3.1 產品定位

產品概述：這是一款和房屋貸款利率相關的產品，引用選擇權的概念，標的為市場*房價指數**的變動率***。

產品特點：當市場房價增長率不再像期初購買房屋時那麼高，消費者有權將自己的房貸利率降低（依據事先確定的和房價指數相關的關聯公式）

市場定位：基本消費人群為準備購買房屋并向銀行借有房貸的購房者，目標消費人群為對房價持續快速增長持有懷疑態度的購房者。



圖表 8 產品説明

3.2 產品內容描述

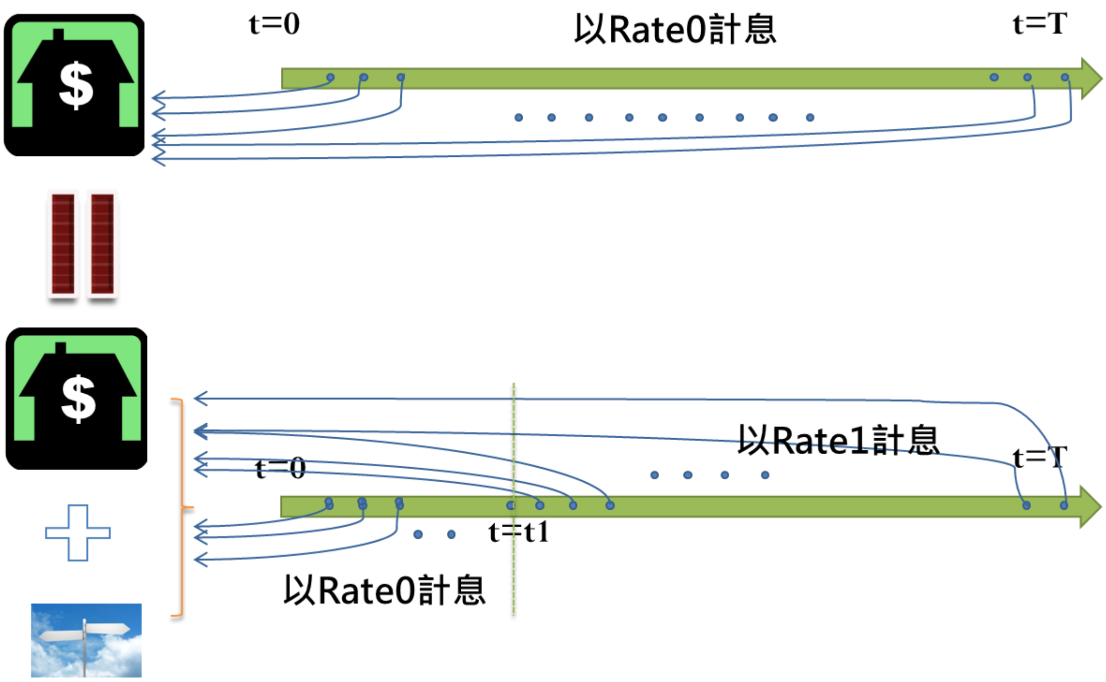
期初（t=0）時，購買者向銀行以約定的還款利率 rate0 和還款方式借款購買房屋，借款時間為 T。購買此產品之後，在期初（t=0）到產品的期末（t=t1）時，購買者按照期初約定的利率還款。

產品期末（t=t1）時，產品購買者有權利決定之後的還款利率 rate1，一是保持期初

決定的利率，即 rate1=rate0；二是選擇由公式（與利率和房價指數變動相關聯）計算出的新利率 rate，即 rate1=rate。

在產品期末（t=t1）至還款結束（t=T）期間，購房者都可以根據新確定的利率 rate1 來進行還款。

3.3 定價思路



圖表 9 產品定價思路

我們對于產品的訂價思路是遵循，不同的訂價方式付出的現值是相同的。也就是說在沒有購買產品的所有利息（以 rate0 計息）加本金的現值，和購買產品后的所有利息（t1 前以 rate0 計息，t1 后以 rate1 計息）加本金的現值與產品價格的總和相同。這樣就說明產品的價值等於前者計息方式得到的現值減去後者計息方式得到的現值。

因為前者利率是固定的，所以訂價的關鍵就在於怎麼計算後者的現值。首先利率和房價指數都是服從一定分配的（上一章節提到的）， 所以我們可以用模擬的方法來求期望；再者需要確定的一個是在 t1 時刻 rate 的與房價及利率變動的關聯方式，這點我們會根據歷史的資料（台北 2005 年 1 月——2013 年 4 月）來找出比較合適的關聯方式和參數。

訂價時就利用模擬得到的未來房價指數及利率，以及歷史資料得到的關聯公式計

算兩種計息方式，產品價格就是兩者的差額。

這樣的訂價方式是從價值角度出發，比較會偏差的地方一個是利率的決定可能并不像所用的 OU 模型那麼簡單，因為它是受政策影響很大的一個變量；另一個是所定的還款利率與房價指數和利率相關聯的方式，可能需要更為嚴謹和周全的考量。

3.4 簡化模型的例子

爲了說明訂價的過程和思路，我們將模型簡化、並賦予具體數值。

1）借款方式和利率：期初投資者向銀行以固定利率 Rate0 借款 K，期限 T 為 10 年，寬限期 2 年

2）期初所定還款利率 Rate0：台灣五行庫新承做購屋貸款利率(%)+0.5%

3）t1 的確定：將合約的時間與寬限期相同，即 t1 為寬限期 2 年

4）貼現利率：台灣一銀一年定期存款利率(%)

5）貸款金額 K：96 萬（8 年每月還款本金 1 萬）

其他 K，t1，T 并不影響模型本身，這裡是選了個例子方便計算說明。

3.5 還款利率與房價及利率變動的關聯方式

這裡我們採取簡單的線性關聯，一下兩種方式

Rate=Rate0+a*Δp+b*min(0,Δr/r0)　　----------（1）

Rate=Rate0(1+a*Δp+b*min(0,Δr/r0)　）-----（2）

Δp 為房價指數寬限期（2 年）內最低漲幅與期初（t=0）時漲幅的差額，

Δr 為寬限期到期時（t1=2）市場利率與期初（t=0）時的差額。

因為這個選擇權主要避的是房價的風險，利率風險是其次考量的，所以不希望當利率上升時的衝擊會影響（或主導）到房價對還款利率的影響，因此兩個模型中都用到了 min(0,Δr/r0)。

Δp 也可為寬限期到期時的漲幅與期初比較，但爲了選擇權更具吸引力，所以選

用寬限期內最低的漲幅，這會導致 Δp 不會大於 0，同時 min(0,Δr/r0)最大也為 0，所以 rate 不會產生比 rate0 大的數，選擇權正常情況下都是會被執行的。但爲了減少極端值的出現導致還款利率的極端值，甚至可能為負，這裡會加界限條件，也就是 rate 不能少於 30%的 rate0，當計算出來的 rate 小於 30%的 rate0 時，用 30%*rate0 替代。

3.7 用歷史資料找合適的參數

接下來要做的是上述兩個關聯方式的參數的合理估計，當然這裡可以直接運用之前確定的房價指數及利率服從的隨機過程來確定。這里我們選擇運用已有的歷史資料來尋找，希望能更加符合實際。

歷史資料的選取：

1、2005 年 1 月—2013 年 4 月的台北地區信義房價指數作為房價指數；

2、2005 年 1 月—2013 年 4 月台灣五行庫新承做購屋的貸款利率，在此基礎上加上 0.5%作為期初確定的還款利率 rate0；

3、2005 年 1 月——2013 年 4 月台灣一銀一年定期存款利率，以此作為貼現利率。

結果（不同參數下的選擇權價格）：

表格 2 不同參數下的選擇權價格

		模型（1）		模型（2）	
a	b	選擇權平均價格	標準差	選擇權平均價格	標準差
0.23	0.25	2145（2145）	0.2556	6485	0.8096
0.2	0.056	741	0.061	2145（2145）	0.2145
1	0	1784	0.117	4721	0.3215
0.5	0	892	0.058	2360	0.161
0.75	0.25	3066	0.2674	8922	0.8626
0.5	0.25	2619	0.26	7741	0.8332
0.25	0.25	2173	0.2557	6561	0.8107
0.75	0.5	4792	0.5149	14303	1.6412
0.5	0.5	4347	0.5114	13122	1.6215
0.25	0.5	3901	0.5096	11942	1.6046

1、括號內為第一期的還款金額，找到選擇權價格與第一期還款價格相等的 a,b 我

們這裡把這個視為最優（即第一組 ab 為模型一的最佳，第二組 ab 為模型二的最佳）

2、當 b=0 即不考慮利率的變動（利率服從的分配沒有很好的擬合）也是可以接受的結果，標準差普遍比較小

3、當 b 大時，即加大 Δr 的的影響力時平均價格和標準差會明顯增加，這代表利率影響很大，甚至主導了整體的影響，與設計的初衷（規避的是房價風險而非利率風險）相悖，所以不取

4、模型二的價格和標準差普遍比模型一大，模型二是 Rate=Rate0(1+a*Δp+b*min(0,Δr/r0))，模型一是 Rate=Rate0+a*Δp+b*min(0,Δr/r0) ，很明顯模型二是由 Rate0 乘以影響率，模型一是相加，所以模型二中兩者對 Rate 的影響大於模型一

5、可以看出當增加 a、b 時選擇權價格會增加，這與邏輯也相同，可能避掉的風險越大選擇權價值越大，由這點同時可以延伸出在設計產品時可以根據個人的不同需求來改變 a\b 的大小，從而定價。

3.8 模擬未來的訂價

選用的參數與簡化模型相同，用上頁選定的參數模擬（p，r 個各模擬 1000 個，即期末 p、r 可能性模擬了 100 萬次） 得出的選擇權價格

t=0：2013 年 4 月 30 日

t1=2: 2015 年 4 月 30 日

T=10: 2023 年 4 月 30 日

期初所定貸款利率：2.5%

定存利率：1.355%

借款金額 K：96 萬

採用的是模型（1）a= 0.23 ;b=0.25

即： $Rate=Rate0+0.23*\Delta p+0.25*\min(0,\Delta r/r0)$

選擇權價格：958

首期需付利息:1084

4. 小結

我們設計了一款針對房價指數變動率為標的的選擇權，這個選擇權賦予房貸者一個權利：當市場房價增長率不再像期初購買房屋時那麼高時，消費者有權將自己的房貸利率降低（依據事先確定的和房價指數相關的關聯公式）

選擇權的基本消費人群為準備購買房屋并向銀行借有房貸的購房者，目標消費人群為對房價持續快速增長持有懷疑態度的購房者。

選擇權的價格可根據 3.7 小節展示的不同的利率關聯公式而變動，選擇權價格越大，當未來房價指數上漲趨勢不如預期時可少償還的利息越少。

這個選擇權雖然可能幫助房貸者減少其未來要償還的利息額，但其的價值是公平的。

由 3.8 小節我們也展示了一個可供參考的定價基準，即此選擇權價格與第一期要支付的利息較接近，這樣不會顯得太貴。我們也認爲，這個不算太貴的選擇權，對購房者而言類似火災保險等低價保險，具備實際的吸引力。

本文的不足之處：對於房價指數的隨機過程的刻畫，我們直接採用了 Geometric OU process, 這一模型對台灣的信義房價指數是否適用、其他文獻中提到的模型是否會更好，我們由於能力和時間的限制沒有進行深入的探討。

附錄：Matlab Code

```
%  產生OUprocess
function x=OUMonteCarlo(x0,T,dt,theta,mu,sigma,s)

% run s times monte carlo simulation of OU process
n=T/dt;
```

```
x=zeros(n+1,s);
e=randn(n+1,s);

k1=exp(-theta*dt);
x(1,:)=x0;

for i=2:n+1
    for j=1:s

x(i,j)=k1*x(i-1,j)+mu*(1-k1)+(sigma)*sqrt((1-k1^2)/(2*theta))*e(i,j);
    end
end
```

```
%OU process轉換為房價指數 x0為期初前一期房價指數
function index=pindex(x0,ouprocess)

[m,n]=size(ouprocess); %計算行數列數
dp=ouprocess+ones(m,n); % 計算lnp(t)/lnp(t-1)
lnindex=zeros(m+1,n);

%計算lnp
for i=1:n
    lnindex(1,i)=log(x0)* dp(1,i);
    for j=2:(m+1)
    lnindex(j,i)=dp(j-1,i)*lnindex(j-1,i);
    end
end

index=exp(lnindex);

end
```

```
function p=payback(rf,rate)
p=0;
for i=1:96
    p=p+(97-i)*rate/(12*(1+rf)^(2+i/12));
end
end
```

```
n=1000;
rf=OUMonteCarlo(1.355,24,1,0.52356,1.60561,0.45311,n);% 產生100個2年利率,
初始為13年4月, 25*100
x=OUMonteCarlo(0.002492753,24,1,0.707968605,0.001208393,0.005216124,n);
index=pindex(219.51,x);% 產生房價指數, 初始為13年4月, 26*100
deltaindex=zeros(24,n);% 儲存delta index
deltap=zeros(n,1);% 儲存 min delta index-t0
deltarf=zeros(n,1);%儲存 delta rf
```

```
for i=1:n
    for j=1:24
        deltaindex(j,i)=index(j+1,i)/index(j,i)-1;
    end
    deltap(i)=min(deltaindex(:,i))-deltaindex(1,i);
end
for i=1:n
    deltarf(i)=min(0,(rf(24,i)/rf(1,i)-1));
end
%計算rate
a=0.23;
b=0.25;
for i=1:n*n
    j=ceil(i/n);
    k=i-(j-1)*n;
    rate(i)=0.025+a/100*deltap(j)+b/100*deltarf(k);
end
p0=payback(0.01355,0.025);
p1=payback(0.01355,rate);
price=mean(p0*ones(1,n*n)-p1)
```

[1] Steven Laufer, 2013. Equity Extraction and Mortgage Default, *Federal Reserve Working Paper*

[2] 資料來源：臺灣經濟新報

[3] F.J. Fabozzi, R.J. Shiller and R.S. Tunaru , 2010. Property Derivatives for Managing European Real-Estate Risk, *European Financial Management*

[4] RJ Buttimer Jr, JB Kau, VC Slawson Jr, 1997. A Model for Pricing Securities Dependent upon A Real-Estate Index, *Journal of Housing Economics*

[5] J. Hull, 1993. Options Futures, and Other Derivative Securities, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.

[6] AW Lo, J Wang, 1995. Implementing Option Pricing Models When Asset Returns Are Predictable, *Journal of Finance*.